



Renato Nobili

10. Filosofia scientifica

La logica nella fisica (*ad usum philosophi*)

1. Introduzione

Circa il modo con cui la logica interviene nella fisica, è opportuno innanzi tutto considerare che nella fisica teorica la mente umana si finge divina. Per quanto la scienza fisica in generale affondi solidamente le sue radici nella conoscenza sperimentale, la fisica teorica, per contro, si basa principalmente su *esperimenti ideali* o, come Einstein li chiamava, *esperimenti pensati*. Questi sono pure estensioni immaginarie di esperimenti reali, nelle quali il soggetto ideale della conoscenza, che è in ognuno di noi, si figura dotato di illimitate capacità osservative e operazionali. In corrispondenza, quanto più il linguaggio della fisica teorica pretende a sua volta di raggiungere un'illimitata capacità descrittiva esplicativa e predittiva, tanto più esso tende a serrarsi in una struttura formale di tipo logico-matematico.

Fin dalla sua antica origine, la logica tratta dell'*essere vero* o dell'*essere falso* di una proposizione linguistica e, in tempi più recenti, del suo *essere probabile*. In questo modo le proposizioni del linguaggio comune diventano *logiche*. La logica studia le relazioni d'implicazione tra proposizioni logiche al fine di costruire nuove proposizioni logiche, di cui dovrà dimostrare la verità, falsità o calcolare la probabilità. La probabilità predice la frequenza relativa con cui si presenta un certo evento, quando un esperimento è ripetuto infinite volte in identiche condizioni. Essa è rappresentata da un numero reale p compreso tra 0 e 1, estremi inclusi, in simboli matematici $0 \leq p \leq 1$. I valori 0 e 1 rappresentano, rispettivamente, la falsità o la verità della proposizione. Per le probabilità p_1, p_2, \dots di un insieme completo di eventi reciprocamente esclusivi vale la regola di somma $p_1 + p_2 + \dots = 1$.

I referenti delle proposizioni logiche possono essere eventi, fatti, stati, l'essere o il non essere di una certa cosa o di una certa combinazione di cose, vale a dire la loro esistenza o non esistenza, del loro accadere o non accadere; ma anche il darsi o non darsi di cambiamenti di stato, vicende, corsi temporali di eventi ecc. A prima vista, questa corrispondenza tra parole e cose o fatti sembra una procedura tanto innocente quanto naturale, che non contraddice alcuna regola del ben pensare e non introduce surrettiziamente alcuna indebita implicazione riguardo a quanto è dato osservare e argomentare in ogni possibile circostanza. Ma non è così.

Se assumiamo che il mondo evolva in modo *deterministico*, come insegna la fisica classica, allora la nozione di probabilità esprime solo la nostra ignoranza circa lo stato reale delle cose. Per tale ragione, essa, in fin dei conti, dipende da quanto uno ne sa di più o di meno. Si può allora immaginare che per una mente ideale onniveggente e onnisciente non esista il probabile ma solo l'essere certamente vero o certamente falso.

Se invece assumiamo che il mondo evolva in modo *non deterministico*, come insegna la fisica moderna, la nozione di probabilità non esprime tanto o soltanto un nostro possibile grado d'ignoranza circa lo stato delle cose o dei fatti, ma anche un certo irriducibile grado

d'indeterminatezza intrinseca, non tanto dello stato fisico, che può essere in sé ben determinato, quanto piuttosto di ciò che di tale stato è possibile osservare, anche idealmente, con strumenti di misura infinitamente precisi e potenti; incertezza che persiste a dispetto d'ogni tentativo di saperne di più, anche da parte di una mente ideale onnivigente e onnisciente.

Questa differenza di concetto ci appare ancor più drammatica se andiamo ad investigare la struttura della logica nella sua radice storica. All'origine del concetto di essere vero o falso, come pure dell'essere probabile, sta il concetto di *essere possibile*. Il concetto di *possibilità* sorge spontaneamente nella mente umana come espressione del dubbio aprioristico circa il verificarsi o il non verificarsi di un certo evento e l'esistenza o la non esistenza di una certa cosa. In questo senso, la probabilità, come pure la verità o la falsità, sono pure quantificazioni matematiche del possibile. Ora, bisogna considerare che in sede filosofica, ma possiamo aggiungere scientifica, la nozione del possibile non ebbe un inizio tranquillo.

Il punto è che se si assume che il mondo fisico evolva in modo deterministico, come fu anticamente postulato nella teoria atomistica di Democrito, allora la nozione di possibile può essere introdotta mediante una semplice definizione: *una cosa o un fatto si diranno possibili se e solo se prima o poi avranno luogo, dato che, se non dovessero mai avere luogo, dovremmo ritenerli impossibili*. Allo stesso modo, un'affermazione logica potrà dirsi logicamente possibile, ma sarebbe forse meglio dire ammissibile, se e solo se prima o poi sarà vera.

Fu questo il famoso Argomento Maestro di Diodoro Crono di Megara, seguace del pensiero di Democrito e contemporaneo di Aristotele. È importante notare che questa nozione del possibile non ha significato fisico, poiché nella visione deterministica ogni cosa o fatto è quello che è senz'altra possibilità. Essa ha, infatti, un significato puramente logico o, meglio, pre-logico, poiché esprime solo il nostro dubbio aprioristico circa l'esistere o l'accadere.

Com'è noto, nel libro di Metafisica, Aristotele confuta in modo radicale questa nozione definitoria del possibile sostenendo invece che un fatto può dirsi possibile anche se non accadrà mai. Per esempio, è immaginabile che uno possa costruire, anche se non costruisce, o che sia in piedi, anche se è seduto. "Se il possibile esistesse solo nella misura in cui può essere realizzato - osserva il grande filosofo - sarebbe falso che una determinata cosa è possibile anche se non realizzerà mai. In tal caso perderemmo di vista le cose che sono impossibili, come ad esempio la commensurabilità (razionale) della diagonale con il lato di un quadrato. In realtà il falso e l'impossibile non sono la stessa cosa, giacché è, ad esempio, falso che tu ora sia in piedi se sei seduto, ma non è impossibile."

La nozione moderna di esistenza reale in un determinato modo e ad un determinato istante e quella di possibilità corrispondono rispettivamente alle nozioni aristoteliche di essere in atto (*energeia*) e di essere in potenza (*dynamis*). Per Aristotele l'essere in potenza è inteso come principio del cambiamento di qualcosa in qualcos'altro e immaginato come qualcosa che esiste indipendentemente dall'esser in atto, anche se proviene sempre da qualcosa che è in atto. "L'errore di Diodoro - afferma Aristotele - fu di credere che c'è potenza solo quando c'è atto e che quando non c'è atto non c'è neppure potenza." Ora, poiché ciò che è in potenza ad un certo istante può essere in atto in un istante successivo, la transizione dalla potenza all'atto si presenta anche come il principio del movimento e della capacità di trasformazione delle cose. Ciò è d'importanza capitale per la fisica.

È evidente che in Aristotele il possibile non riveste tanto o soltanto un significato logico - secondo il quale il possibile esisterebbe solo nel pensiero - quanto piuttosto quello di una proprietà fisica dello stato presente delle cose. È altrettanto evidente che, introducendo la nozione di possibilità come concetto primario, irriducibile ad ogni definizione, Aristotele mette implicitamente in discussione il determinismo delle leggi naturali, che era il principale fondamento della nozione megarica del possibile, aprendo così la via all'idea che una cosa possa anche accadere per caso invece che per necessità. L'idea del caso, infatti, presuppone quella della possibilità assolutamente imprevedibile, che non necessariamente dovrà verificarsi.

A distanza di tempo, nel pensiero logico più evoluto dell'epoca moderna, tale modo di pensare divenne anche il presupposto della nozione di probabilità.

Nella visione determinista della fisica classica dell'epoca moderna tornò ad imporsi il solo significato logico; ma nella visione indeterminista della fisica contemporanea l'idea dell'esistenza in qualche modo fisica del possibile s'impone di necessità. In caso contrario, i fisici del CERN non potrebbero parlare di particelle reali come materializzazioni di particelle "virtuali" e d'interazioni tra particelle virtuali.

La nozione aristotelica di possibilità ebbe un grande impatto nella filosofia di tutta l'epoca successiva, anche riguardo alla fondazione della fisica teorica. Nella teoria della bilancia e della leva di Archimede (Mach, 1977), come pure nella teoria della riflessione della luce tramandataci da Erone di Alessandria (L.Russo, *La rivoluzione dimenticata*. p. 88, 2003), la nozione aristotelica di possibilità sta alla base della derivazione delle leggi fisiche da *principi di ottimalità*. Ciò è chiaro, ad esempio, nell'enunciato archimedeo: *tra tutte le configurazioni possibili, la bilancia assume quella che coincide con il suo contrario, precisamente la più simmetrica* (Fig.1A). Oppure, nel caso dell'ottica: *tra tutti i cammini possibili che un raggio di luce riflesso da uno specchio può percorrere nello spazio, il cammino effettivo è quello di minima lunghezza* (Fig.1B).

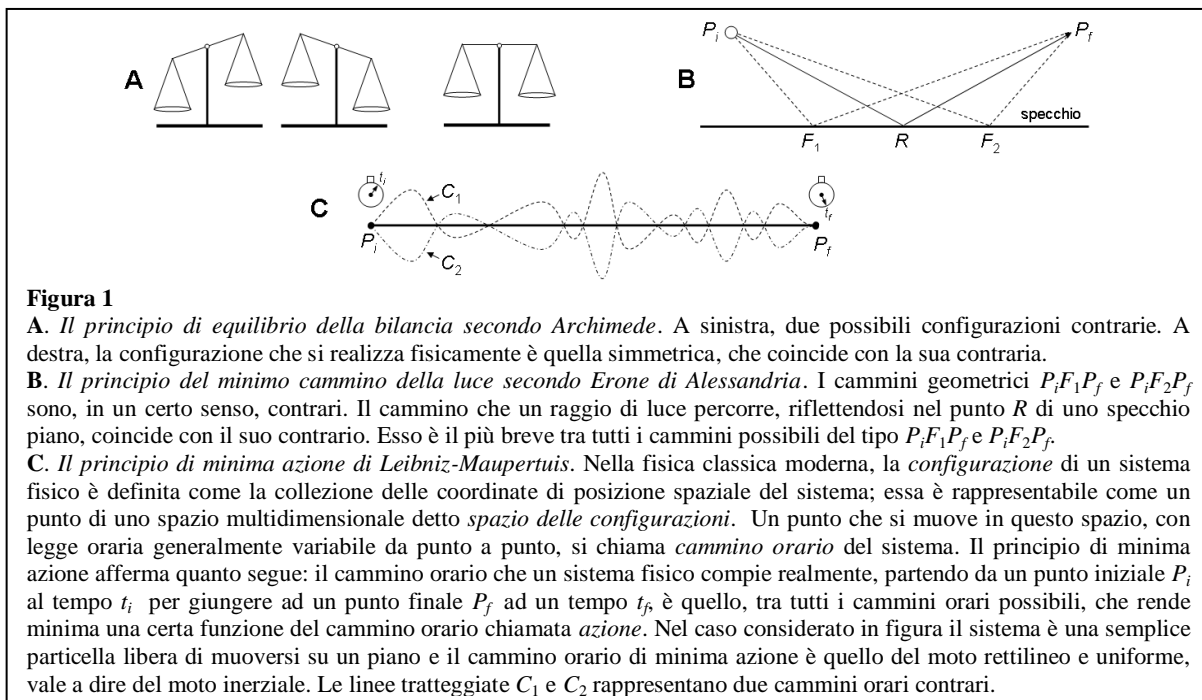


Figura 1

A. Il principio di equilibrio della bilancia secondo Archimede. A sinistra, due possibili configurazioni contrarie. A destra, la configurazione che si realizza fisicamente è quella simmetrica, che coincide con la sua contraria.

B. Il principio del minimo cammino della luce secondo Erone di Alessandria. I cammini geometrici $P_iF_1P_f$ e $P_iF_2P_f$ sono, in un certo senso, contrari. Il cammino che un raggio di luce percorre, riflettendosi nel punto R di uno specchio piano, coincide con il suo contrario. Esso è il più breve tra tutti i cammini possibili del tipo $P_iF_1P_f$ e $P_iF_2P_f$.

C. Il principio di minima azione di Leibniz-Maupertuis. Nella fisica classica moderna, la *configurazione* di un sistema fisico è definita come la collezione delle coordinate di posizione spaziale del sistema; essa è rappresentabile come un punto di uno spazio multidimensionale detto *spazio delle configurazioni*. Un punto che si muove in questo spazio, con legge oraria generalmente variabile da punto a punto, si chiama *cammino orario* del sistema. Il principio di minima azione afferma quanto segue: il cammino orario che un sistema fisico compie realmente, partendo da un punto iniziale P_i al tempo t_i per giungere ad un punto finale P_f ad un tempo t_f , è quello, tra tutti i cammini orari possibili, che rende minima una certa funzione del cammino orario chiamata *azione*. Nel caso considerato in figura il sistema è una semplice particella libera di muoversi su un piano e il cammino orario di minima azione è quello del moto rettilineo e uniforme, vale a dire del moto inerziale. Le linee tratteggiate C_1 e C_2 rappresentano due cammini orari contrari.

Com'è noto, questi e altri esempi condussero Leibniz, nella seconda metà del '600, ad enunciare il *principio di concorrenza dei possibili*: *tra tutti i cammini orari che la configurazione di un sistema fisico può percorrere nel passare da una configurazione iniziale P_1 al tempo t_1 a una finale P_2 al tempo t_2 , si realizza quello che, nel quadro delle sue possibili varianti locali, coincide col suo contrario* (Fig.1C). Il principio d'ottimalità invocato da Leibniz equivale alla ricerca del cammino orario che rende minima un'opportuna grandezza fisica dipendente dal cammino. Questa grandezza fu chiamata erroneamente *resistenza* da Leibniz (1682), sebbene con questo termine egli intendesse significare *costrizione*. Applicando il principio d'ottimalità alle possibili storie dell'universo, dall'istante della sua divina creazione al suo divino destino finale, Leibniz giunse a considerare il corso deterministico effettivo dell'universo come la realizzazione del migliore dei mondi possibili. È noto che questa visione metafisica e finalista non mancò di suscitare il sarcasmo degli illuministi del '700, in particolare di Voltaire nel celebre romanzetto intitolato *Candido*.

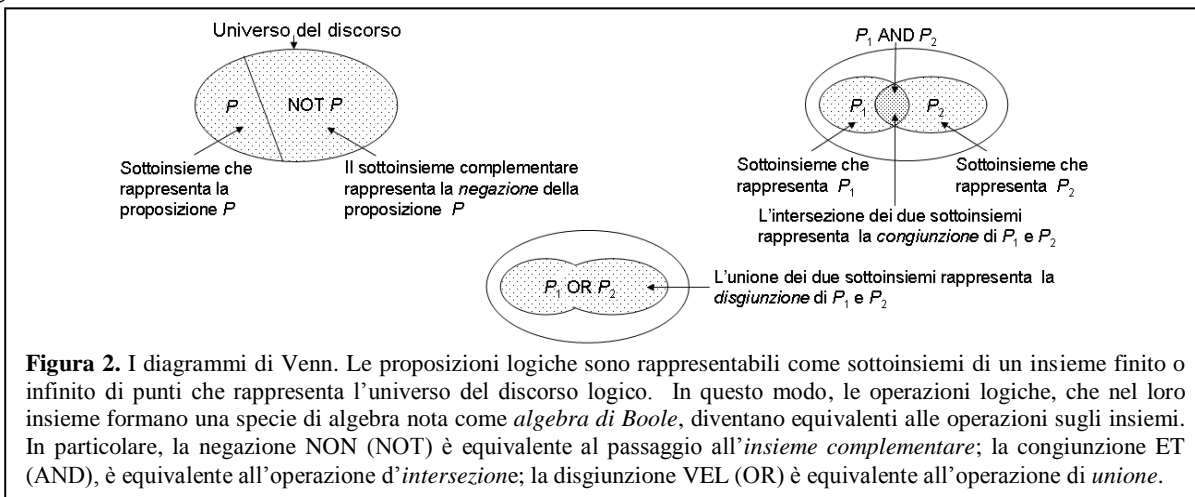
Nel 1747 il principio fu riproposto da Maupertuis, in modo puramente pragmatico e privo di riferimenti teologici, col nome meno soggetto ad equivoci di *principio di minima azione*, e

ancor oggi conserva questo nome. Nella seconda metà del '700, questo principio fu sviluppato e portato al massimo livello di generalità da Eulero e Lagrange, fino a diventare il più potente criterio di derivazione delle leggi della fisica classica, elettromagnetismo e teoria della relatività compresi. Tuttavia esso continuò ad essere considerato con sospetto da Ernst Mach verso la fine dell'800 e da molti fisici sperimentali all'inizio del '900.

La ragione profonda del principio di minima azione rimase misteriosa fino alla nascita della meccanica quantistica, quando si capì che il cammino di minima azione della fisica classica è l'approssimazione ottico-geometrica della propagazione ondulatoria che rappresenta l'evoluzione del sistema fisico nella meccanica quantistica (Dirac, 1930; Feynman, 1947). Fu così chiaro che il misterioso principio leibniziano di *concorrenza* dei possibili non era altro che l'approssimazione classica del principio d'*interferenza ondulatoria* dei possibili quantistici.

2. La logica classica

Una caratteristica importante della logica classica, nella sua determinazione originaria, è la sua *atemporalità*: l'essere vero e l'essere falso sono concepiti come proprietà eterne e immutabili dell'essere in quanto esistere. Tuttavia, fu presto chiaro che questo può valere in sede etico-giuridica e nella matematica ma non nella fisica, giacché in questo caso ciò che è vero ora può non essere vero in un momento precedente o successivo. Così, nel passaggio dal linguaggio etico-giuridico e matematico a quello fisico, l'originario carattere atemporale si schiaccia sul sincronico costringendo il linguaggio logico a parlare di cose esistenti solo temporaneamente e di fatti che accadono ad un certo istante. Per questa ragione, nel linguaggio fisico, a differenza da quello matematico, le proposizioni che descrivono le proprietà di un sistema devono in generale ritenersi vere o false soltanto ad un determinato istante.



Un importante teorema dovuto a Stone (1936) dimostra che la struttura formale della logica proposizionale classica, ovvero l'*algebra di Boole*, è identica a quella della teoria degli *insiemi*; in particolare, che una proposizione logica è sempre rappresentabile come un sottoinsieme di un insieme finito o infinito di punti rappresentativo dell'universo del discorso (Fig.2).

In questa rappresentazione, la negazione è il sottoinsieme complementare, la congiunzione di due proposizioni è l'intersezione di due sottoinsiemi, la loro disgiunzione è l'unione di due sottoinsiemi, i punti rappresentano le *proposizioni atomiche*, vale a dire quelle che non possono presentarsi come disgiunzioni di due diverse proposizioni. Si badi che le proposizioni atomiche non sono le più semplici ma le più particolareggiate. La teoria degli insiemi si presenta così come la concretizzazione matematica della logica classica e non è perciò un caso che oggi essa sia posta a fondamento della matematica.

Nel caso della fisica classica, l'universo del discorso è la totalità degli stati possibili di un sistema, rappresentata come insieme atemporale di punti, cosicché ogni punto rappresenta uno stato particolare del sistema. Poiché si esclude che il sistema possa trovarsi simultaneamente in due stati diversi, vale il *principio di reciproca esclusione degli stati*. Nella fisica antica la

nozione di stato coincide con quella di configurazione (vedi Fig.1C), ma nella fisica classica moderna è più generale perché comprende le quantità di moto di tutte le parti del sistema.

Le proposizioni che descrivono le proprietà del sistema sono rappresentate da sottoinsiemi di stati che variano nel tempo. Da quanto è stato detto sopra, si deduce che la descrizione precisa di uno stato richiede una proposizione massimamente particolareggiata; cosicché, se l'insieme di tutti gli stati possibili è infinito, la proposizione è, in generale, infinita. Per la stessa ragione, ad esempio, la proposizione che descrive la posizione di un punto su una retta contiene un numero reale che, in generale, è espresso da infinite cifre.

Ora, nella visione determinista del mondo fisico, lo stato di un sistema ad un certo istante determina in modo unico e infinitamente preciso lo stato del sistema ad ogni altro istante precedente o successivo. L'evoluzione temporale di uno stato si potrà perciò rappresentare come il cammino di uno stato entro l'insieme atemporale di tutti gli stati possibili in modo che per ogni stato passa uno ed un solo cammino. Pertanto - come già per gli stati - varrà il principio di reciproca esclusione dei cammini. Tutte le evoluzioni che gli stati possono compiere, nelle più disparate condizioni iniziali e di condizionamento esterno, potranno allora rappresentarsi come un fitto insieme di cammini chiusi o aperti che percorrono, come linee di un flusso di corrente, l'intero insieme degli stati.

Il carattere sincronico della logica classica si espande così immediatamente sul diacronico trasferendo completamente la sua struttura al linguaggio che descrive i corsi temporali degli eventi. In questa rappresentazione diacronica del possibile, il linguaggio della fisica permane inscritto nella logica atemporale della matematica. Così, in definitiva, il determinismo conduce la logica classica a presentarsi come l'unica ammissibile nella descrizione del mondo fisico.

3. Gli spazi degli stati classici

Nella fisica classica si assume il principio di evoluzione continua degli stati. Ciò permette di introdurre una nozione di *distanza* tra gli stati. Tutti gli stati che possono essere raggiunti per evoluzione del sistema in un tempo vieppiù piccolo, a partire da un dato stato *S*, sono vieppiù vicini ad *S*, cosicché ogni stato dell'insieme si presenta inserito in un *intorno* infinitamente fitto di stati. Ciò conferisce all'insieme di punti che rappresentano gli stati la struttura di uno *spazio continuo* di tipo geometrico, che ha come coordinate le coordinate di posizione spaziale e le quantità di moto di tutte le parti del sistema. Così, l'insieme di tutti i possibili stati di un sistema, che prima era immaginato privo di struttura, è promosso al rango di *spazio degli stati*.

In modo simile, per ogni cammino continuo, chiuso o aperto, che lo stato percorre in questo spazio per azione della legge del moto, a partire da uno stato iniziale nell'infinito passato per giungere a uno stato finale nell'infinito futuro, esistono infiniti percorsi continui vicini. Pertanto, anche l'insieme dei possibili cammini degli stati si geometrizza.

Attraverso la nozione di spazio degli stati, la struttura insiemistica del possibile si estende dalla geometria alla cinematica, dalla statica alla dinamica e da qui all'intera fisica classica. Si comprende così come tra la visuale deterministica della fisica classica e la logica classica abbia potuto stabilirsi un legame indistruttibile, attraverso il quale ciascuna di esse giunse a legittimare l'altra in modo perfetto. Questo legame fu così forte che la caduta dell'una comportò inevitabilmente quella dell'altra.

Poiché, prima della scoperta della meccanica quantistica la visuale classica del mondo fisico appariva ovvia e naturale, era naturale pensare che non avesse senso considerare altre logiche al di fuori di quella classica, al punto che ancora oggi, non solo quasi tutti i matematici e molti epistemologi, ma anche alcuni fisici, non si capacitano di doverla abbandonare.

A questo proposito è importante notare che tutti gli spazi degli stati introdotti nella fisica nel corso del suo sviluppo storico - dalla statica di Archimede alla moderna teoria dei campi quantizzati - rappresentano i possibili modi dell'esistenza di un sistema fisico in diverse condizioni iniziali e di interazione col suo mondo esterno. La struttura dello spazio degli stati è diversa in teorie fisiche diverse, ciò è naturale; ma nel passaggio dalla fisica classica a quella

quantistica avviene un sovvertimento logico, giacché il *principio di reciproca esclusione degli stati* è rimpiazzato, come infine vedremo, dal *principio di sovrapposizione degli stati*.

Ad oscurare ulteriormente la questione del rapporto tra la logica classica e il determinismo sopraggiunse nella seconda metà dell'800 la teoria delle probabilità. Nell'ambito della fisica classica l'indeterminazione nella descrizione degli eventi naturali si presenta nella forma della teoria delle probabilità applicata alla meccanica, cioè la *meccanica statistica*. Tuttavia, in questa trattazione, la descrizione probabilistica si sovrappone a quella logico-classica senza metterla in discussione, cosicché questa continua a permanere nello sfondo come base indistruttibile della rappresentazione del mondo fisico.

Nella meccanica statistica si può anche ammettere che l'accadere di un evento o l'esistenza di una cosa sia solo probabile anziché vera o falsa, ma ciò avviene perché l'osservazione dello stato fisico è soggetta a inevitabili errori di misura o perché si conosce soltanto una parte delle circostanze e delle condizioni esterne nelle quali un evento si verifica. Del resto, la determinazione precisa degli stati fisici è praticamente impossibile in uno spazio degli stati continuo, dato che, come già si è detto, la specificazione delle coordinate di un punto richiede, in generale, una proposizione infinita. Si può tuttavia supporre che, aumentando sempre più la precisione delle misure e delle osservazioni, si possa ridurre l'indeterminazione di tanto quanto si vuole. In questo modo, nella visione probabilistica della fisica classica il determinismo si presenta ancora come la proprietà fondamentale di un mondo oggettivo reale che è conoscibile in modo perfetto solo idealmente e descrivibile solo matematicamente.

4. L'indeterminismo

La critica del determinismo democriteo, implicita nella visione aristotelica del possibile, aprì la via alla visione indeterminista. Riporto qui due passi stralciati dal *De Rerum Natura* di Lucrezio, in cui l'autore si proponeva di tradurre nel "barbarico" latino la teoria atomistica di Epicuro, che era di moda tra i filosofi di Alessandria d'Egitto e di Roma in epoca ellenistica.

Da *De Rerum Natura* di Tito Lucrezio Caro (~60 a.C.): Traduzione dell'autore (un po' modernizzata):

[Denique] si semper motus conectitur omnis
et vetere exoritur (motu) novus ordine certo
nec declinando faciunt primordia motus
principium quoddam quod fati foedera rumpat,
ex infinito ne causam causa sequatur,
libera per terras unde haec animantibus extat,
unde est haec, inquam, fatis avulsa voluntas
per quam progredimur quo ducit quemque voluptas,
declinamus item motus nec tempore certo
nec regione loci certa, sed ubi ipsa tulit mens?
[II, 251-260]

...
Quare in seminibus quoque idem fateare necessest,
esse aliam praeter plagas et pondera causam,
motibus, unde haec est nobis innata potestas,
de nilo quoniam fieri nil posse videmus.
Pondus enim prohibet ne plagis omnia fiant
externa quasi vi. Sed ne mens ipsa necessum
intestinum habeat cunctis in rebus agendis
et devicta quasi cogatur ferre patique,
id facit exiguum clinamen principiorum
nec regione loci certa nec tempore certo.
[II, 284-293].

[Dunque], se ogni moto si connettesse sempre ad altri, e quello nuovo sorgesse dal precedente secondo un ordine certo, se le particelle primordiali non fossero deviate da un principio del moto che viola le imposizioni del destino scombinate l'infinita successione dei nessi causali, come si spiegherebbe l'esistenza sulla terra di animali dotati di libero arbitrio? Da dove proverrebbe - mi chiedo - questa volontà affrancata dal destino, in virtù della quale noi procediamo dove più ci piace e deviamo il nostro percorso non ad un determinato istante, né in un luogo preciso, ma quando lo decide la mente?

...
Bisogna perciò riconoscere che sugli elementi che formano la materia, oltre agli urti e alla gravità, agisce anche un altro fattore del moto, dal quale trae origine quella nostra facoltà innata, poiché nulla viene dal nulla. La gravità, infatti, contraddice che tutto ciò che accade si riduca ad urti, come per azioni esercitate dall'esterno. Ma che la mente stessa in ogni sua decisione non segua una necessità interna, né, come domata, sia costretta a patire e subire, deriva da quell'esigua deviazione degli elementi fondamentali che si producono a tempi e in luoghi incerti.

[Nota: Il latino antico confondeva la gravità col peso come pure l'aria col vento. Circa le nozioni antiche di gravità e peso, vedi L.Russo, *La rivoluzione dimenticata*, III ed., pp. 329-379, 2003]

La possibilità di una visione indeterminista delle leggi fisiche fu dunque posta fin dai tempi antichi in un modo così lucido e preciso da sbalordire i fisici moderni. Si pone pertanto il problema di capire perché non abbia avuto un gran seguito nei secoli successivi e abbia infine ceduto il passo alla visione rigorosamente determinista della fisica classica moderna.

La ragione principale è certamente imputabile al fatto che la rappresentazione insiemistica del possibile, fornita dalla logica classica, è assai più semplice e intuitiva di quella ondulatoria e probabilistica in uso nella moderna fisica quantistica.

Il primo requisito circa la rappresentazione teorica di un sistema fisico, sia esso classico o quantistico, è che sia possibile determinarne con la massima precisione lo stato ad un qualsiasi istante mediante *un sistema completo di misure ideali reciprocamente compatibili*. La descrizione precisa di uno stato è una proposizione atomica che descrive tutte le proprietà dello stato, le quali si presumono osservabili mediante un sistema completo di misure. Essendo in generale infinita, essa riveste un significato ideale esprimibile solo matematicamente. In ogni buona teoria fisica, la conoscenza precisa dello stato consente di predire al meglio i possibili comportamenti del sistema, ma nel caso della meccanica quantistica non sempre con certezza.

La condizione che gli strumenti siano compatibili è necessaria perché potrebbe darsi il caso che dove sta uno strumento capace di rivelare la proprietà A non possa starci nello stesso tempo un altro capace di rivelare la proprietà B . Se questo accade, si dirà che i due strumenti, come pure le corrispondenti osservazioni, sono *incompatibili*. L'esistenza di strumenti e osservazioni incompatibili non si presenta mai nella fisica classica, ma è di regola nella meccanica quantistica. Fu proprio questa la gran novità introdotta nella fisica tra il 1925 e il 1930.

Sia nella fisica classica sia in quella quantistica, quando si esegue una misura, lo stato fisico può subire un'alterazione. Ciò dipende dal fatto che l'interazione con l'apparato di misura comporta, in generale, una perturbazione dell'osservato. Nella fisica classica questa perturbazione può essere tanto piccola quanto si vuole, cosicché si può idealmente supporre che uno stato fisico possa essere osservato senza subire alterazioni. Ma nella fisica quantistica la perturbazione non può essere tanto piccola quanto si vuole perché, a causa della quantizzazione, l'energia minima di una radiazione luminosa di data lunghezza d'onda ha un valore finito proporzionale al potere risolutivo della radiazione nella visione microscopica.

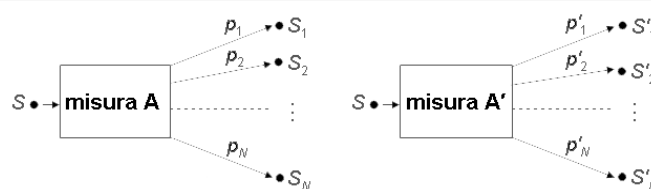


Figura 3. L'osservazione di un generico stato S mediante un sistema completo di misure reciprocamente compatibili A obbliga il sistema fisico a manifestarsi in uno degli stati S_1, S_2, \dots, S_N caratteristici di A , chiamati *autostati* di A . Questi sono tutti gli stati possibili che il sistema può avere immediatamente dopo l'osservazione di A . Prima che questa osservazione sia effettuata, la conoscenza precisa di S ci permette solo di predire che tali autostati si presenteranno con frequenze relative p_1, p_2, \dots, p_N .

L'osservazione dello stesso stato S mediante un sistema completo di misure compatibili A' , ma nel complesso incompatibili con A , obbliga il sistema a manifestarsi in uno degli stati S'_1, S'_2, \dots, S'_N , che formano un insieme diverso da S_1, S_2, \dots, S_N , con probabilità rispettive p'_1, p'_2, \dots, p'_N .

Lo spazio degli stati del sistema, subito dopo l'osservazione, si presenta così in due modi diversi; nel primo come uno spazio formato dagli autostati di A , nel secondo come uno spazio formato dagli autostati di A' . Questo sembra contraddire le proprietà di unicità e completezza dello spazio degli stati, a meno che ciascuno dei due insiemi di autostati non permetta di determinare in qualche modo anche l'altro, e pertanto, come questo, anche gli insiemi di autostati di tutte le possibili osservazioni del sistema.

Com'è illustrato in figura 3, l'osservazione completa A di uno stato S ad un determinato istante non produce, in generale, risultati certi, potendo accadere che l'esito dell'osservazione sia uno stato caratteristico di A , poniamo S_k , prevedibile solo con probabilità p_k . Ciò significa che, ripetendo la stessa osservazione di S un numero infinito di volte in identiche condizioni, si troverebbe che, subito dopo la misura, S_k si presenta con frequenza relativa p_k . Queste probabilità sono dunque dipendenti sia da S sia da A , perché, se si cambia S oppure si effettua, invece di A , un'osservazione A' non compatibile con A , l'insieme di stati $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ caratteristici di A diventa l'insieme di stati $\{S'_1, S'_2, \dots, S'_N\}$ caratteristici di A' , che è diverso dal precedente e corredato da un diverso insieme probabilità. Nel seguito, gli stati caratteristici

di una misura completa \mathbf{A} saranno chiamati *autostati* di \mathbf{A} , come si usa nella meccanica quantistica. La corrispondenza tra le osservazioni e i loro autostati è molto stretta. Si può infatti dimostrare che due osservazioni sono compatibili se e solo se possiedono gli stessi autostati.

Considerando i comportamenti descritti in figura 3, giungiamo alla conclusione che le *osservazioni* agiscono come filtri che analizzano uno stato S obbligandolo a trasformarsi subito in un autostato di \mathbf{A} , così da produrre, in generale, una transizione di stato discontinua. Rispetto alla possibilità di eseguire l'osservazione \mathbf{A} , lo stato S si presenta come l'insieme di stati possibili $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ di probabilità rispettive $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$; rispetto alla possibilità di osservare \mathbf{A}' lo stesso S si presenta come l'insieme di stati possibili $\{S'_1, S'_2, \dots, S'_N\}$ di probabilità rispettive $\{p'_1, p'_2, \dots, p'_N\}$. Usando una terminologia aristotelica, potremmo affermare che, in generale, rispetto ad un'osservazione possibile \mathbf{A} , uno stato in atto S , che non sia già un autostato di \mathbf{A} , è in potenza anche un insieme di stati $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, uno solo dei quali si pone in atto immediatamente dopo che l'osservazione \mathbf{A} è effettuata. Se S è un autostato di \mathbf{A} , esso rimane in atto tale e quale anche dopo l'osservazione.

In questo attuarsi della potenza di S relativa ad \mathbf{A} , l'indeterminazione aprioristica, espressa dal fatto che i vari S_k erano previsti con probabilità p_k , si annulla, giacché, immediatamente dopo l'osservazione, uno degli stati ha probabilità uno e tutti gli altri probabilità zero. Si noti che l'indeterminazione è, in generale, diversa per osservazioni possibili diverse e che pertanto non deve ritenersi propria dello stato, ma piuttosto dei possibili esiti di un'osservazione.

Un punto importante circa la relazione tra lo stato fisico ad un certo istante e l'osservazione completa di tutte le sue proprietà è che, immediatamente dopo l'osservazione, lo stato è perfettamente individuato e in seguito varia molto poco in tempi molto brevi. Se esso subisse un brusco cambiamento subito dopo essere stato prodotto dall'osservazione, e prima di essere nuovamente osservato, la nozione di stato non avrebbe alcuna utilità e la rappresentazione del mondo fisico sarebbe impossibile. Questo argomento è molto importante perché implica il principio d'evoluzione continua non solo per gli stati dei sistemi fisici classici, ma anche per gli stati *non osservati* dei sistemi quantistici. Ciò trova conferma nel fatto che, se immediatamente dopo aver osservato che lo stato di un sistema quantistico è S_k , si ripete la stessa osservazione, si trova che lo stato è sempre S_k , come è illustrato in figura 4.

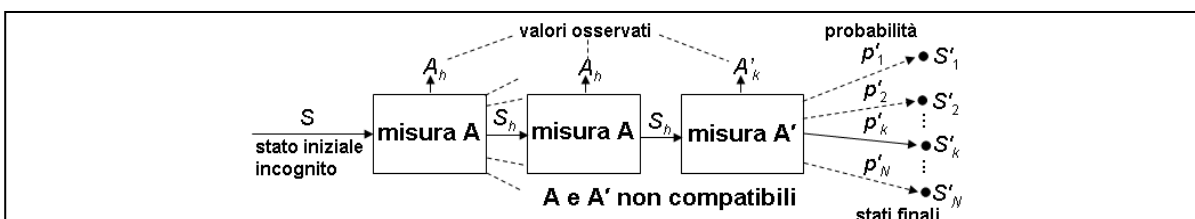


Figura 4. Uno stato incognito S è osservato ad un certo istante mediante un sistema completo di strumenti di misura compatibili \mathbf{A} . Si osserva il valore A_h corrispondente allo stato S_h . La stessa osservazione ripetuta subito dopo conferma il risultato precedente. Una terza osservazione \mathbf{A}' eseguita subito dopo mediante un sistema completo di strumenti incompatibile con \mathbf{A} , ha come esiti possibili certi valori A'_1, A'_2, \dots, A'_N corrispondenti agli stati S'_1, S'_2, \dots, S'_N caratteristici di \mathbf{A}' , i quali sono prevedibili con probabilità rispettive p'_1, p'_2, \dots, p'_N . Nell'istante stesso in cui la misura di \mathbf{A}' fornisce il valore A'_k lo stato diventa S'_k .

Questo esperimento ideale è inteso a dimostrare che, in generale, S_k possiede un'indeterminazione che dipende in modo essenziale dall'osservazione che si compie subito dopo. Essa è nulla nella seconda osservazione di \mathbf{A} ma è non nulla nell'osservazione di \mathbf{A}' . La massima indeterminazione si ha quando le probabilità degli stati previsti sono tutte uguali, cioè quando $p'_1 = p'_2 = \dots = p'_N = 1/N$.

L'aspetto rilevante dell'esperimento ideale descritto in figura 4 è che, se si è osservato lo stato S_k mediante un certo sistema di strumenti compatibili e subito dopo si osserva lo stato così prodotto con un secondo sistema di strumenti incompatibile col precedente, non si osserva più, in generale, lo stato S_k , ma uno appartenente all'insieme di autostati $\{S'_1, S'_2, \dots, S'_N\}$ caratteristici del nuovo sistema di strumenti. Questi avranno, in generale, un certo grado d'imprevedibilità, espressa dal fatto che, prima della seconda misura, erano attesi con probabilità rispettive $\{p'_1, p'_2, \dots, p'_k\}$. Tuttavia, dopo la seconda misura, in stretta corrispondenza con i dati della nuova osservazione, solo uno di questi - poniamo S'_h - è di fatto

prodotto. Così, mentre lo stato subisce un nuovo brusco cambiamento, il secondo apparato d'osservazione fornisce l'informazione che segnala esattamente la produzione del nuovo stato.

In breve, possiamo affermare che la misura quantistica è un processo bilatero che da un lato informa gli apparati d'osservazione e dall'altro "mette in forma" lo stato del sistema obbligandolo a diventare un particolare autostato dell'osservazione. Discende da ciò che *l'esistenza fisica, intesa come un susseguirsi di fatti che accadono realmente nel mondo, non può prescindere dall'esistenza degli apparati di osservazione.*

5. Principio di complementarità e relazioni di indeterminazione

Le informazioni che un'osservazione completa è in grado di fornire ad un certo istante formano un insieme di possibilità sincroniche reciprocamente esclusive, dato che, per esempio, l'indice di uno strumento non può stare simultaneamente in posti diversi. In quanto tali, esse sono descrivibili da un linguaggio logico-classico, i cui termini e la cui sintassi sono strettamente dipendenti dalle caratteristiche dell'apparato d'osservazione. Bisogna però aggiungere che, nel descrivere lo stato di un sistema quantistico ad un certo istante, si deve aver cura di non mescolare mai i linguaggi relativi ad apparati di misura reciprocamente incompatibili. Chi tentasse di farlo incapperebbe inevitabilmente in qualche contraddizione. L'esistenza di strumenti d'osservazione e misura reciprocamente incompatibili, che permettono di descrivere proprietà del sistema diverse ma contraddittorie, non ha l'analogo classico.

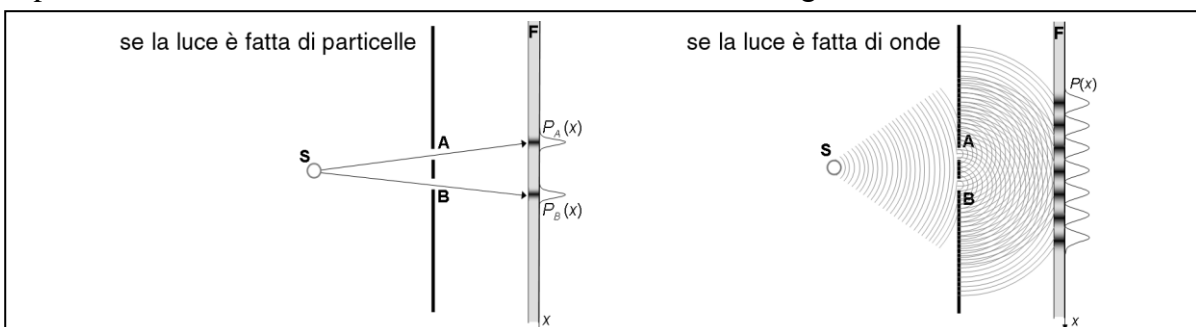


Figura 5. La figura illustra come si comporta la luce emessa da una sorgente **S** che impressiona una lastra fotografica **F** dopo avere attraversato uno schermo dotato di due fenditure **A**, **B** (dette fori di Young). Se la luce fosse fatta di particelle, si formerebbero su **F** due bande scure, con densità di annerimento rappresentate dai profili $P_A(x)$ e $P_B(x)$. In realtà, dato che la luce è fatta di onde, si forma su **F** una figura formata da frange di interferenza ondulatoria, con densità di annerimento rappresentata dal profilo ondulato $P(x)$.

La scoperta fatta da Planck e Bohr, all'inizio del '900, che la luce di frequenza ν è emessa e assorbita in quantità discrete di energia $E = h\nu$, dove h è la costante di Planck, indusse Einstein ad ipotizzare che la luce è fatta di particelle che egli chiamò *fotoni*.

Per verificare se i fotoni sono veramente particelle, basta mettere davanti a una delle due fenditure un rivelatore di fotoni. Si potrà allora constatare che, ogni volta che un fotone è catturato in **A** o in **B**, **F** non rimane impressionata in alcun punto, com'è logico aspettarsi nel caso che la luce sia fatta di particelle.

D'altronde, anche evitando di intercettare i fotoni in **A** o **B**, possiamo lo stesso assicurarci che essi arrivino su **F** separatamente uno dall'altro, così da impressionare **F** in un insieme statistico di punti. A questo scopo basta diminuire l'intensità della luce fino ad essere sicuri che la quantità di energia emessa da **S** in una certa unità di tempo è inferiore all'energia di un singolo fotone. In questo caso si constata con sorpresa che si formano ancora le frange d'interferenza caratteristiche della luce di frequenza ν , come se il singolo fotone fosse un'onda che passa per entrambe le fenditure.

Riassumendo: se ci mettiamo in condizioni di verificare se i fotoni passano per **A** o per **B**, perdiamo la possibilità di osservare le frange di interferenza; se ci mettiamo in condizioni di osservare le frange d'interferenza, non possiamo più dire che i singoli fotoni sono passati o per **A** o per **B**, ma dobbiamo assumere che ciascuno di essi sia passato *per entrambe le fenditure*. Questo esperimento riesce anche con elettroni al posto di fotoni. Esso dimostra che, mentre i cammini classici percorsi da una singola particella che va da **S** a **F** sono due *possibilità reciprocamente esclusive*, nel caso quantistico sono invece due *possibilità che si sovrappongono e interferiscono come onde*.

L'esempio più noto è quello che riguarda il dualismo onda/corpuscolo: se osservo l'aspetto corpuscolare di una particella elementare, per esempio un fotone o un elettrone, devo rinunciare alla possibilità di osservarne l'aspetto ondulatorio. Viceversa, se osservo il secondo, devo rinunciare alla possibilità di osservare il primo. Ciò è spiegato in figura 5.

Oppure quello del dualismo posizione/quantità di moto: se misuro con precisione la posizione di una particella devo rinunciare alla possibilità misurarne con precisione la quantità

di moto e viceversa. O quello del dualismo tempo/energia: se misuro con precisione un intervallo temporale, devo rinunciare alla possibilità di misurare con precisione l'energia che il sistema possiede durante tale intervallo, e viceversa. In tutti questi casi non esiste alcun apparato d'osservazione capace di osservare simultaneamente entrambi gli aspetti con precisione tanto grande quanto si vuole.

La partizione di ciò che è osservabile in coppie coniugate di aspetti, tali che quando uno è osservato con la massima precisione l'altro rimane totalmente indeterminato, è nota come *principio di complementarità*. La relazione di dipendenza inversa tra le precisioni delle misure di grandezze coniugate è nota come *relazione d'indeterminazione di Heisenberg*.

Riassumendo, la descrizione di un sistema quantistico ad un determinato istante è incompleta perché esistono aspetti che si possono rivelare solo mediante osservazioni incompatibili, necessariamente eseguibili a tempi diversi, che sono legate tra loro da relazioni probabilistiche. Come si può rappresentare matematicamente tutto questo? In particolare, come si può rappresentare uno stato quantistico non osservato e la sua evoluzione temporale?

6. Fenomeni e interfenomeni

Sia nella fisica classica sia in quella quantistica, si assume che i sistemi fisici abbiano due importanti proprietà: la permanenza del sistema per un tempo infinito e l'ideale reversibilità di tutte le trasformazioni di stato. Queste assunzioni trovano giustificazione nella credenza che la materia sia in ultima analisi divisibile in parti indistruttibili, che possono combinarsi in un numero infinito di modi, e che queste combinazioni possano essere fatte e disfatte a piacere mediante tecniche opportune. In accordo con queste proprietà ideali, si assume che gli spazi degli stati di un sistema abbiano le proprietà di *continuità, transitività e reversibilità*. Vale a dire, rispettivamente, che agendo opportunamente sul sistema, sia possibile trasformare per gradi insensibili ogni suo stato anche senza osservarlo, che sia così possibile raggiungere tutti gli stati dello spazio degli stati e che sia inoltre possibile condurre con continuità qualunque stato iniziale lungo un cammino continuo chiuso di forma arbitraria nello spazio degli stati.

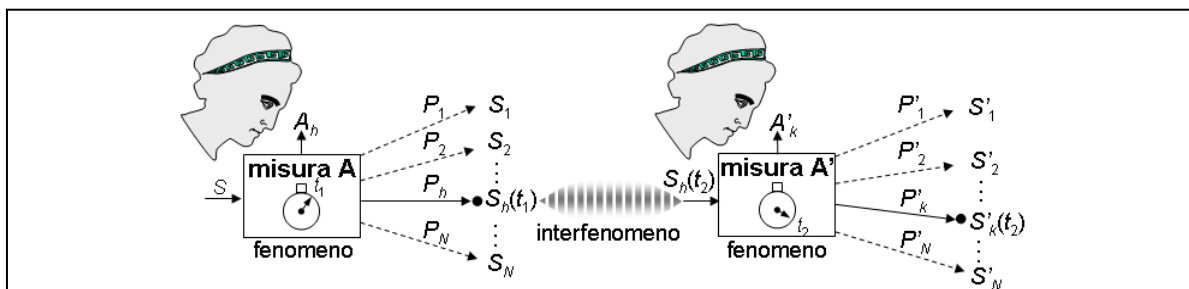


Figura 6. La fenomenologia quantistica secondo Reichenbach (1954). Lo stato S è osservato al tempo t_1 mediante una sistema completo di misure A capace di rivelare i fenomeni A_1, A_2, \dots, A_N . Subito dopo questa misura, è osservato il fenomeno A_h , il quale, prima della misura, era atteso con probabilità p_h . In corrispondenza, com'è indicato a destra della figura, lo stato iniziale S diventa l'autostato S_h di A . Dal tempo t_1 al tempo t_2 lo stato evolve inosservato da $S_h(t_1)$ ad $S_h(t_2)$. Al tempo t_2 si esegue l'osservazione completa A' , solo che ora lo stato $S_h(t_2)$ non è, in generale, né un autostato di A né un autostato di A' . Pertanto, ora sarà osservato un nuovo fenomeno A'_k ed $S_h(t_2)$ sarà obbligato a diventare un autostato $S'_k(t_2)$ di A' . Anche nel caso in cui A' è uguale ad A , $S_h(t_2)$ è, in generale, diverso da $S_h(t_1)$.

Durante ciascuna misura, lo stato subisce, in generale, un brusco cambiamento dovuto al fatto che esso è obbligato a prendere la forma di un autostato di A o di A' . Questi bruschi cambiamenti sono prevedibili solo in modo probabilistico e sono concomitanti con i fenomeni osservati. Per contro, nell'intervallo tra le due misure lo stato evolve in modo *continuo, deterministico e reversibile*. Poiché questa evoluzione non è osservata, è opportuno caratterizzarla come qualcosa che accade tra due fenomeni osservati in tempi diversi, in breve come *interfenomeno*.

La figura 6 illustra cosa significa *interfenomeno*. Tra l'istante t_1 in cui è osservato il fenomeno A_h e l'istante t_2 in cui è osservato il fenomeno A'_k , l'evoluzione dello stato, da S_h al tempo t_1 ad S'_k al tempo t_2 , per quanto non osservata, è *continua, deterministica e reversibile*, esattamente come l'evoluzione degli stati nella fisica classica.

Per contro, in generale, l'osservazione trasforma lo stato in modo *discontinuo e indeterministico*, e ha pertanto le caratteristiche di un processo irreversibile piuttosto che di una pura evoluzione quantistica tra il sistema osservato interagente con l'apparato d'osservazione.

Procedendo per questa via, la fisica teorica si trova di fronte ad un problema non risolvibile nell'ambito della fisica classica: rappresentare gli stati di un sistema le cui proprietà osservabili nelle più disparate condizioni sperimentali sono in generale reciprocamente incompatibili. Vale a dire, il problema di fornire una descrizione completa dello spazio degli stati nel caso in cui i fenomeni che si osservano dipendono in modo essenziale e apparentemente contraddittorio dalle modalità d'osservazione. È chiaro che in queste condizioni bisogna abbandonare l'idea di poter identificare gli stati con i loro aspetti fenomenici, come invece si fa nella fisica classica.

Questa più complessa relazione tra fenomenologia quantistica e proprietà di trasformazione ed evoluzione temporale degli stati solleva subito un secondo problema: comprendere che cosa sia esattamente un'osservazione e, in particolare, chiarire se l'irreversibilità che si manifesta in natura, per esempio nei fenomeni termodinamici e in quelli biologici, sia in qualche modo associata a processi d'osservazione. Inoltre, se abbia senso parlare di "osservazione" in assenza di esseri viventi e pensanti e - in caso di risposta negativa - se abbia senso considerare i fenomeni quantistici come produzioni degli "ego astratti" degli esseri pensanti, come ipotizzò il giovane von Neumann nel suo trattato sui fondamenti della meccanica quantistica (1930).

Nei corsi universitari di meccanica quantistica si assume che gli strumenti di misura - ad esempio, regoli, orologi, schermi, voltmetri, amperometri, lastre fotografiche, rivelatori di particelle ecc. - si comportino come sistemi fisici classici. Di solito si evita di spiegare il senso di questa assunzione e, al più, ci si limita ad affermare che la questione esula dagli intenti del corso, dato che l'attenzione è focalizzata sui sistemi microscopici.

Purtroppo in questo modo si evita di porre il problema di come la ricchissima varietà delle strutture e dei processi che si osservano nel mondo macroscopico possa emergere da un mondo di sistemi microscopici formati da poche specie di particelle elementari governate da leggi semplici, simmetriche e temporalmente reversibili, e di come questo possa conciliarsi con l'irreversibilità che si osserva nel mondo macroscopico. Semplificando in tale modo la questione si evita inoltre di spiegare che il mondo macroscopico degli strumenti di misura non è in realtà semplicemente quello descritto dalla fisica classica ma quello descritto dalla termodinamica. Così facendo, infatti, si nasconde la natura essenzialmente termodinamica di ogni processo di misura o di osservazione. La dimostrazione che l'informazione prodotta da una misura o da un'osservazione è necessariamente accompagnata da un congruo aumento di entropia termodinamica - definito il *costo termodinamico dell'informazione* - è dovuta a Leo Szilard (1929). Se così non fosse il secondo principio della termodinamica sarebbe violato. Questo importante argomento indusse Schrödinger (1946), Shannon (1948) e Brillouin (1950) ad interpretare l'informazione come una sorta di entropia negativa o *neg-entropia*.

Chiaramente, questo argomento ci obbliga a considerare le osservazioni quantistiche come processi termodinamici irreversibili che danno luogo a mutamenti di stato permanenti del mondo macroscopico interpretabili come elementi di informazione memorizzati nella materia. L'informazione che si sedimenta in questo modo durante l'evoluzione cosmica può essere elaborata da sistemi termodinamici via via più complessi e portata a livelli superiori di significatività nelle memorie di strutture materiali più complesse, infine coinvolta nei processi biologici e in quelli neurologici generatori dell'autocoscienza. Dobbiamo qui considerare che il mondo macroscopico è un sistema termodinamico che evolve irreversibilmente solo in quanto è infinitamente esteso e in uno stato di perenne espansione, che contrasta la naturale tendenza all'equilibrio termodinamico mantenendo freddo lo spazio all'esterno delle stelle. In un sistema in equilibrio termodinamico, infatti, non ci può essere circolazione di informazione perché la trasmissione e l'elaborazione dei segnali richiede, in ultima analisi, la degradazione dell'energia luminosa fornita dalle stelle in radiazioni termiche infrarosse che si disperdono all'infinito; oltretutto, essendo l'entropia massima, l'informazione è ovunque nulla.

Possiamo pertanto affermare che la fenomenologia quantistica trova spiegazione nel rapporto tra due livelli di descrizione del mondo fisico: quello meccanico-quantistico e quello termodinamico, fuori equilibrio, dell'universo infinito in espansione.

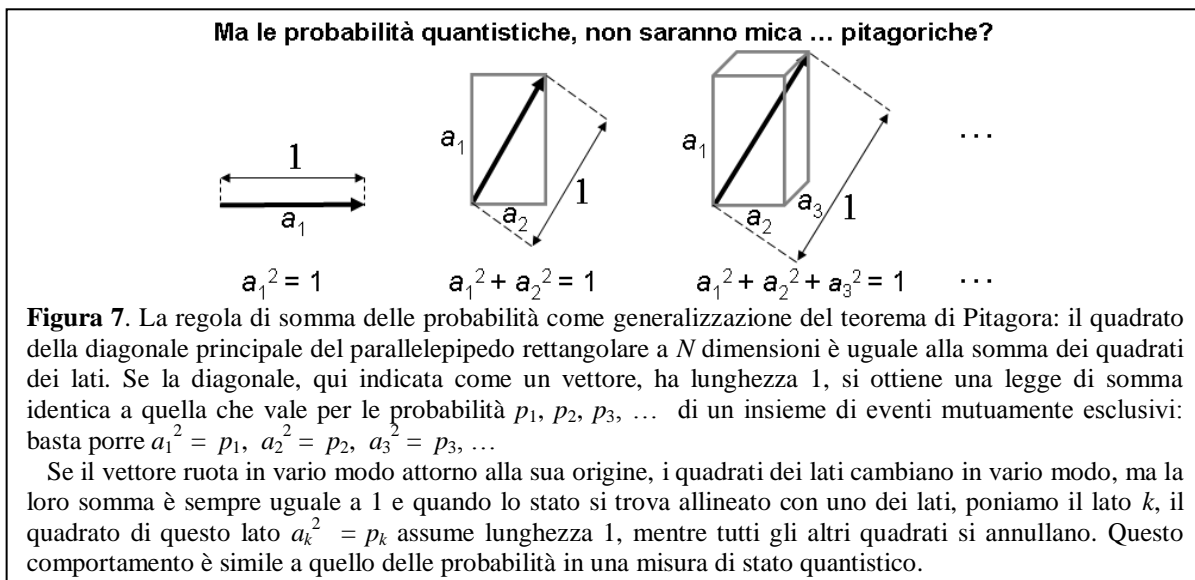
C'imbattiamo qui in un aspetto di notevole importanza filosofica: l'impossibilità di disgiungere la duplice esistenza, da un lato interfenomenica e dall'altro informazionale, del mondo naturale. Da un punto di vista puramente quantistico, l'universo esisterebbe solo come pura potenzialità di fenomeni mai osservati, rappresentata da uno stato che evolve in modo continuo deterministico e reversibile mentre, da un punto di vista puramente fenomenico, esso si presenterebbe come un'incessante produzione di eventi macroscopici privi di relazioni causali capaci di determinarne un'evoluzione che appare quasi deterministica su larga scala.

Dobbiamo perciò assumere l'esistenza di due livelli ontologici reciprocamente correlati: uno *oggettivo*, formato da entità interfenomeniche; l'altro - che possiamo definire *soggettivo* - formato da apparati e processi d'osservazione macroscopici capaci di accumulare ed elaborare informazione, di comunicare tra loro e di agire sul livello oggettivo sottostante. La logica di questo più ampio linguaggio descrittivo del mondo fisico ci appare pertanto come una specie di dialettica della relazione osservato-osservatore, nella quale l'osservato è il mondo descritto dalla fisica quantistica, mentre l'osservatore è il mondo descritto dalla termodinamica dei processi irreversibili.

Dobbiamo quindi riconoscere, in ultima analisi, che la fisica moderna ci porta a descrivere l'universo come un'entità biologica oltre che minerale. Nella sua duplice esistenza di entità quantistica ed entità termodinamico-informazionale, questo organismo infinito che chiamiamo universo evolve irreversibilmente producendo un'infinita congerie di eventi, che si sedimentano come elementi d'informazione e sono soggetti a processi viepiù complessi nei corpi celesti meno caldi, dove talvolta esistono le condizioni per l'esistenza della vita. Per questa via, attraverso le menti di esseri intelligenti e coscienti, prodotti ad un certo stadio della sua evoluzione, esso perviene a sviluppare la capacità di auto-descrizione e auto-comprensione.

7. Gli spazi degli stati nella meccanica quantistica

La figura 7 illustra in modo schematico come si presenta la regola di somma della teoria delle probabilità nella meccanica quantistica.



La somiglianza tra il comportamento delle proiezioni della diagonale principale di un parallelepipedo a N dimensioni sulle direzioni a due a due ortogonali dei lati e l'effetto prodotto da una misura quantistica su uno stato iniziale S suggerisce di rappresentare questo stato come un vettore $|S\rangle$ unitario, vale a dire di lunghezza 1, appartenente a uno spazio di vettori unitari a N dimensioni. Gli autostati della misura potranno allora rappresentarsi come un insieme di vettori unitari, a due a due ortogonali, $|S_1\rangle, |S_2\rangle, |S_3\rangle, \dots$

L'annotazione $|\dots\rangle$, dovuta a Dirac, si chiama *ket*. Essa significa *mezza parentesi*, perché in inglese la doppia parentesi $\langle \dots \rangle$ si chiama *bracket*.

Gli stati possibili prodotti da una misura completa **A** sono rappresentati dall'insieme dei vettori unitari a due a due ortogonali che formano gli assi di uno spazio ad infinite dimensioni. Indicando questi vettori con $|S_1\rangle, |S_2\rangle, \dots, |S_N\rangle, \dots$, ogni altro vettore $|S\rangle$ di questo spazio, dunque ogni stato del sistema, potrà essere rappresentato come una sommatoria

$$|S\rangle = c_1|S_1\rangle + c_2|S_2\rangle + \dots + c_N|S_N\rangle,$$

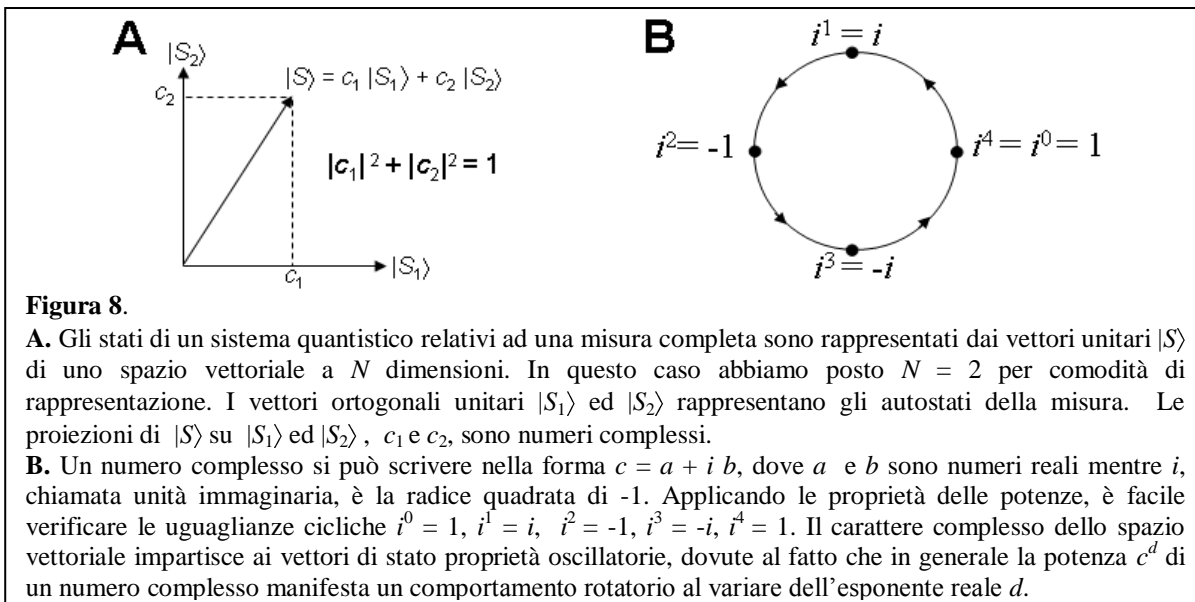
dove c_1, c_2, \dots, c_N sono le proiezioni di $|S\rangle$ sugli assi $|S_1\rangle, |S_2\rangle, \dots, |S_N\rangle$. Il *principio di sovrapposizione* degli stati quantistici è espresso precisamente da questa sommatoria.

Il fatto più singolare di questo tipo di rappresentazione è che c_1, c_2, \dots, c_N non sono numeri reali ma numeri complessi, che possono scriversi nella forma $c_k = a_k + i b_k$ dove a_k e b_k sono numeri reali e $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria; quella che Leibniz chiamava col termine sincopato *ramuno*, "entità anfibia, intermedia tra l'angelico e il diabolico". Essi impartiscono ai vettori di stato proprietà oscillatorie e ondulatorie.

In questa rappresentazione, la probabilità p_k dell'autostato $|S_k\rangle$ è il *modulo quadrato* del numero complesso c_k , vale a dire $p_k = |c_k|^2 = a_k^2 + b_k^2$, dove le barrette indicano il valore assoluto di c_k , precisamente

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

e la condizione che il vettore complesso $|S\rangle$ abbia lunghezza 1 è espressa dalla regola di somma probabilistica $\| |S\rangle \|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_N|^2 = 1$.



La figura 8A illustra come un vettore di stato quantistico $|S\rangle$ si decompone in componenti parallele agli autostati $|S_1\rangle, |S_2\rangle$ di una misura completa in uno spazio degli autostati a due dimensioni come è ad esempio, lo spazio degli stati di *spin* di un elettrone.

La figura 8B rappresenta le proprietà rotatorie delle potenze intere dell'unità immaginaria i . Per una potenza reale r vale la formula

$$i^r = \cos \frac{\pi}{2} r + i \sin \frac{\pi}{2} r,$$

che è la somma di due componenti oscillatorie dipendenti da r , una reale e l'altra immaginaria.

Rispetto ad una misura completa \mathbf{A}' , incompatibile con \mathbf{A} , lo stesso stato sarà rappresentato da una sommatoria del tipo

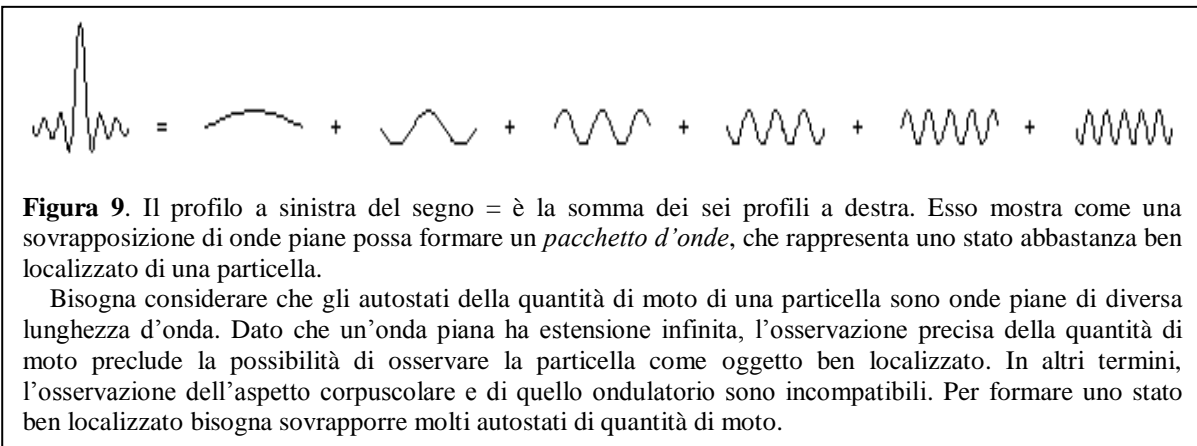
$$|S\rangle = c'_1|S'_1\rangle + c'_2|S'_2\rangle + \dots + c'_N|S'_N\rangle,$$

dove $|S'_1\rangle, |S'_2\rangle, \dots, |S'_N\rangle$ sono gli autostati di \mathbf{A}' e c'_1, c'_2, \dots, c'_N sono numeri complessi generalmente diversi da c_1, c_2, \dots, c_N , ma soddisfacenti, anch'essi, alla regola di somma $|c'_1|^2 + |c'_2|^2 + \dots + |c'_N|^2 = 1$.

Questo significa che gli autostati di \mathbf{A} e quelli di \mathbf{A}' si comportano come gli *assi unitari di due diversi sistemi di riferimento di uno stesso spazio di vettori unitari complessi*. Lo spazio degli stati della meccanica quantistica rimane così caratterizzato come *spazio vettoriale complesso di vettori unitari*. Se N è infinito, esso si chiama *spazio hilbertiano*.

Da un punto di vista strettamente logico non c'è ragione perché i vettori di stato siano complessi piuttosto che reali. Si può tuttavia dimostrare che i sistemi quantistici sono in generale divisibili in parti e componibili per aggregazione di parti separabili se e solo se i vettori di stato sono complessi (Nobili, 2009). Pertanto, la rappresentazione degli stati come vettori complessi di uno spazio hilbertiano è necessaria alla fisica perché, altrimenti, la partizione dell'universo in una parte osservata e una osservatrice non sarebbe possibile.

Il vettore di stato di un sistema non osservato è un puro interferenomeno che evolve in modo deterministico e continuo, poiché l'indeterminismo si manifesta solo negli esiti delle osservazioni. Rispetto ad un apparato d'osservazione capace di rivelare gli aspetti ondulatori invece di quelli corpuscolari, lo stato del sistema non osservato si presenta come una sovrapposizione di onde di varia lunghezza d'onda che si propagano in uno spazio multidimensionale di configurazioni geometriche classiche. In questa rappresentazione, l'aspetto corpuscolare si può approssimativamente ottenere come un pacchetto d'onde formato dalla sovrapposizione di componenti ondulatorie, come è descritto nella figura 9.



Un'altra importante proprietà della rappresentazione ondulatoria riguarda la relazione tra meccanica quantistica e meccanica classica. Analizzando le proprietà della propagazione ondulatoria quantistica per onde di piccolissima lunghezza d'onda, si scopre che i cammini di minima azione degli stati nello spazio degli stati classico costituiscono una sorta di limite ottico-geometrico della propagazione ondulatoria quantistica. Esattamente come, in ottica, i raggi di luce costituiscono il limite geometrico della propagazione ondulatoria della luce. Poiché la lunghezza d'onda dello stato quantistico di una particella è tanto più piccola quanto maggiore è la massa della particella, la rappresentazione quantistica del mondo fisico, che si osserva nel mondo macroscopico, converge verso quella classica.

Ma qui mi fermo perché, se l'addizione è una seccatura, la sottrazione un rompicapo, la moltiplicazione un tormento e la divisione una iattura, i numeri complessi sono certamente una terribile sventura.

Bibliografia

1. Aristotele, *Metafisica*, V. Universale Laterza (1973).
2. Mach, E., *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*. Einaudi (1977).
3. Russo, L., *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. III edizione, Feltrinelli (2003).
4. Leibniz, G. W., *Unicum Opticae, Catoptricae & Dioptricae Principium*. Lipsia (1682).
5. Voltaire, C.C.F., *Candido*. Mondadori (2010).
6. Maupertuis, P.L.M. Baron de, *De la nature. Oeuvres de Maupertuis. Vol. IV*. Lyon (1748).
7. Eulero, L.P. *Lettere a una Principessa tedesca* (Pietroburgo, 1770). Boringhieri (1970).
8. Lucrezio, T.C. *La natura delle cose*. Edizioni BUR. Rizzoli (1997).
9. Dirac, P.M.A. *I Principi della Meccanica Quantistica*. Boringhieri (1959).
10. Feynman, R., Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. *Rev. Mod. Phys.* 20:367-387 (1948).
11. Stone, M.H., The Theory of Representation of Boolean Algebras. *Transactions of the*
12. *American Math. Soc.* (1936).
13. Reichenbach, H., *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*. Einaudi (1954).
14. von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press (1932).
15. Szilard, L., Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen. *Zeitschrift für Physik*, 53:840-853 (1929). Traduzione inglese: On the Decrease of Entropy in a Thermodynamic System by the Intervention of Intelligent Beings. *Behavioral Science* (1964).
16. Schrödinger, E., *Che cos'è la vita. La cellula vivente dal punto di vista fisico*. Adelphi (1995).
17. Shannon, C.E e Weaver, W., *La teoria matematica delle comunicazioni*. ETAS Compass (1971).
18. Brillouin, L., *Science and Information Theory*. Academic Press (1956).
19. Nobili, R. *Le logiche della fisica* (2009); *Il principio variazionale di Leibniz* (2009); *Lavoro produttivo e produzione di informazione* (2011). Rubrica di Filosofia Scientifica a cura di R. Nobili. Sito web: <http://www.steppa.net/html/scientifica/scientifica.htm>

Padova 27-7-2012